



On considère l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' - 2y = 0$.

On cherche une solution S sous la forme d'une série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Le logiciel fourni donne-t-il les solutions de cette équation ?
2. On suppose que S est solution.

$$\text{Montrer que } (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n - 2)a_n = 0.$$

Peut-on simplifier cette égalité ?

3. Montrer que $\forall n \geq 2, a_{2n} = 0$.
4. On suppose que $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$.

Déterminer la valeur de a_n pour tout entier n .

Préciser le rayon de convergence de la série entière.

5. On pose $T(0) = 0$ et $T(x) = \frac{S(x) - 1}{x}$ où S est la série entière trouvée plus haut.

Calculer la dérivée T' de T . (On trouvera une fraction rationnelle simple.)

Trouver la solution S , en utilisant éventuellement le logiciel fourni pour les calculs de primitives.