



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

TSI

## Exercice avec préparation

Soient  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On considère l'application  $u$  définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

1. Justifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Seulement dans cette question, on prend  $n = 2$ .

Écrire la matrice de  $u$  relativement à la base  $(1, X, X^2)$  et sans calculs, répondre aux questions suivantes :

- a. Déterminer une base de  $\text{Ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
- b. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
- c. Déterminer les éléments propres de  $u$ .

On revient au cas général.

3. Déterminer une base de  $\text{Ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $u$ .
5. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

## Exercice sans préparation

Existence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ .