CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PSI

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x de $]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}t$.

2. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

   On écrira ce développement sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en exprimant a_n sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. À l'aide du logiciel de calcul formel, calculer $a_0, \ldots, a_{10}$.

   Vérifier le résultat en formant le développement limité de f à l'ordre 10 au voisinage de 0.

4. Pour $n \geqslant 1$, quel est le signe de a_n ?

5. Montrer que pour tout x dans $[0,1[$ et pour tout entier $p \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} |a_n| x^n \leqslant 1$. Que peut-on en déduire quant à la série $\sum a_n$?

6. Déterminer théoriquement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Vérifier avec le logiciel de calcul formel.

7. Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

   $$(1+x)(xy' - y) + y^2 = 0$$

   En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

   $$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0$$

   Vérifier pour les premières valeurs de n à l'aide du logiciel de calcul formel.

BY-NC-SA