CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PSI

1. On considère les deux matrices A et B, avec

$$A = \begin{pmatrix} -24 & -48 & -233 & -21 \\ 21 & 41 & 189 & 17 \\ -2 & -4 & -18 & -2 \\ 6 & 14 & 75 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 60 & 270 & 30 \\ -150 & -321 & -1590 & -150 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 300 & 600 & 2910 & 279 \end{pmatrix}$$

   a. Vérifier que A et B commutent.

   b. Vérifier que A est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

   c. Déterminer un polynôme S de degré 3 tel que $B = S(A)$.

2. Pour n entier au moins égal à 2 et M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N\,M = M\,N\}$$

   a. Vérifier que $\mathcal{C}_M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant la matrice unité I_n et stable pour la multiplication des matrices carrées.

   b. Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, $P(M) \in \mathcal{C}_M$.

   c. A-t-on, pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists P \in \mathbb{R}[X] \mid N = P(M)\}$$

3.

   a. Montrer que

$$N \in \mathcal{C}_A \iff \exists Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } N = Q(A)$$

   b. Déterminer ce polynôme pour les matrices A^4 et A^{-1}.

   c. Existe-t-il un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = Q(A)$?

BY-NC-SA