Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que l'application
$$\Phi : (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$$
définit un produit scalaire sur l'espace E.

2. À quoi ressemble la sphère unité pour la norme associée à ce produit scalaire lorsque $n = 2$?

3. Montrer que l'ensemble $F = \{P(X) \in E \mid P(0) = 0\}$ est un sous-espace de E et calculer sa dimension, puis la distance $d(1,F)$.

Exercice 2

Soit $p = 2r + 1$ un entier impair. Soit la matrice :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
puis
$$A = \frac{J + J^{-1}}{2} \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

2. Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection que l'on précisera.

3. Étudier la suite de polygones $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ définie par :
   - le polygone $\mathcal{P}_0$ est un polygone comportant p sommets ;
   - si $\mathcal{P}_\mathrm{n}$ est un polygone comportant p sommets, on forme le nouveau polygone $\mathcal{P}_{\mathrm{n}+1}$ à p sommets en remplaçant chaque sommet S de $\mathcal{P}_\mathrm{n}$ par le milieu du segment $[R,T]$, où R et T sont les deux sommets entourant le sommet S dans le polygone $\mathcal{P}_\mathrm{n}$.