



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

Oral

PSI

Exercice 1

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\mathcal{H}$ l'hyperbole de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On notera $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les asymptotes de $\mathcal{H}$.

1. Donner des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, ainsi qu'une paramétrisation de l'hyperbole.
2. Soit M un point de l'hyperbole. Soient A et A' les points de concours de la tangente en M avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Montrer que l'aire du triangle (OAA') est constante.

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^t M = I_3$ (*)

1. On suppose, dans cette question seulement, que M est symétrique. Montrer que :
 - a. M est diagonalisable et $\text{tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.
 - b. On suppose $\text{tr}(M) \in \mathbb{R}_-^*$. Montrer que la suite matricielle $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.
2. On revient au cas général. Prouver que M est diagonalisable.
3. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp}(M)$.
4. Donner un exemple de matrice non symétrique satisfaisant (*).