Exercice 1

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \sin(\varphi(x)) = \sin x$$

1. Montrer que $\varphi'^2(x) = 1$ sur $I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire les expressions possibles de φ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit un entier $n > 1$. On pose $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^2 = I_n\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et infini.

2. Montrer que $\mathcal{S} \subset GL_n(\mathbb{R})$. Est-ce un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$?

3. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il compact ?

4. Démontrer qu'il existe un ouvert Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que Ω ne rencontre pas $\mathcal{S}$, à l'exception de I_n.