



Soit un système composé de deux objets ponctuels M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 respectivement, isolés dans l'espace et s'attirant mutuellement.

1. Montrer que dans un référentiel galiléen convenablement choisi le mouvement de chaque point peut se déduire du mouvement d'un point unique M de masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Montrer que le mouvement est plan.

2. Les deux objets sont reliés par un ressort sans masse linéaire de raideur k de longueur à vide r_0 . La position de M dans le plan de sa trajectoire sera repérée en coordonnées polaires r et θ .
 - a. Montrer que $r^2 \dot{\theta} = C$ où C est une constante, $\dot{\theta}$ désignant la dérivée première de θ par rapport au temps.
 - b. Exprimer l'énergie mécanique barycentrique du système en fonction de r et de C . On pourra poser $\omega_0^2 = k/m$
3. À l'instant initial on lance le système à partir de la position $r = r_0$ et $\theta = 0$ avec pour conditions $\dot{\theta} = \omega$ et $\dot{r} = 0$. On pose $u = r/r_0$ et $\alpha = \omega/\omega_0$.

Exprimer $\dot{u}$, dérivée de u par rapport au temps, en fonction de u , α et ω_0

Écrire l'énergie mécanique sous la forme $F(u)\dot{u}^2 + G(u) = 0$. Par une méthode graphique montrer que u oscille entre deux valeurs extrêmes dont on donnera une des bornes.

4. *Étude informatique.* Le logiciel Equadif et le fichier `i41018.eqd` sont à votre disposition. Ils vous permettent de tracer $u(t)$ (noté $r(t)$) et la trajectoire vue du dessus ($y(x)$). On pourra tracer ces courbes pour différentes valeurs de α . Interpréter le plus complètement possible les tracés obtenus.

Que constatez vous lorsque α tend vers 0 ? Ne peut-on pas le démontrer simplement par le calcul ? Peut on vraiment atteindre une trajectoire parfaitement circulaire comme dans le cas de mouvements avec une force en $1/r^2$?

Dans le logiciel on a pris $\omega_0 = 1$ et $r_0 = 1$.