

Corrigé

1. Cette question est quasi une question de cours. L'examineur attend donc qu'elle soit traitée clairement et rapidement.

O étant un point quelconque pris comme origine, on peut écrire :

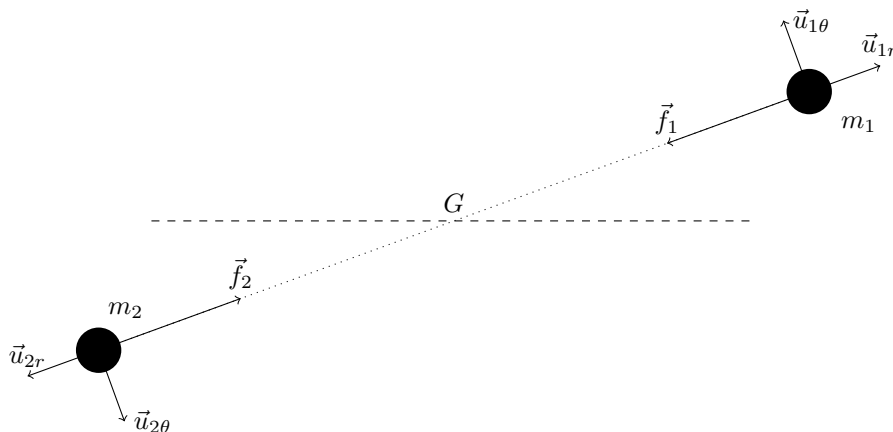
$$\vec{f}_1 = m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \quad \text{et} \quad \vec{f}_2 = m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2}$$

D'autre part

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \frac{\vec{f}_2}{m_2} - \frac{\vec{f}_1}{m_1}$$

avec $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$.

Si on pose $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, il vient $\vec{f}_2 = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$.



On peut choisir comme origine du repère le centre de gravité G des deux masses qui est donné par la relation :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

ce qui conduit à $m_1 r_1 = m_2 r_2$ si on pose $r_1 = \|\overrightarrow{GM_1}\|$ et $r_2 = \|\overrightarrow{GM_2}\|$.

De plus $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ c'est à dire que $\frac{m_1}{m} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}$, soit, finalement : $m_1 r_1 = m_2 r_2 = m r$.

Les trajectoires sont homothétiques par rapport à G . Les mouvements de chaque point peuvent se déduire du mouvement d'un point unique de masse m sur une trajectoire de rayon r .

Pour montrer que la trajectoire est plane on peut calculer la dérivée du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \frac{d \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right)$$

qui donne un vecteur constamment nul. On a donc :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} = \vec{C}$$

et $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est toujours orthogonal à $\vec{C}$. La trajectoire est donc plane et s'effectue dans un plan constamment orthogonal à $\vec{C}$.

2.

a. Pour résoudre cette question il existe deux démonstrations.

- Soit le candidat continue avec le moment cinétique exprimé à la question précédente.

Le calcul du moment cinétique dans le référentiel barycentrique donne

$$\vec{\sigma}_G = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{C} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_i = \frac{dr_i}{dt} \vec{u}_{ir} + r_i \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{i\theta}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}_G = \left(m_1 r_1^2 \frac{d\theta}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{z}$$

où $\vec{z} = \vec{u}_{1r} \wedge \vec{u}_{1\theta} = \vec{u}_{2r} \wedge \vec{u}_{2\theta}$ est orthogonal au plan de la trajectoire.

Comme $mr = m_1 r_1 = m_2 r_2$ il vient finalement $\vec{\sigma}_G = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{z}$, c'est-à-dire $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$ constante.

- Soit le candidat revient au calcul de la force. On a $\overrightarrow{GM_i} = i\vec{u}_{ir}$ ce qui donne après une double dérivation par rapport au temps

$$\frac{d^2 \overrightarrow{GM_i}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{ir} + \left(\frac{dr_i}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left(r_i \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \vec{u}_{i\theta}$$

En écrivant $\vec{F} = m \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2}$ avec $\vec{u}_{1r} = -\vec{u}_{2r}$, $\vec{u}_{1\theta} = -\vec{u}_{2\theta}$ et $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 G} + \overrightarrow{GM_2}$, il vient

$$\vec{F} = m \left(\frac{d^2(r_1 + r_2)}{dt^2} - (r_1 + r_2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{1r} + m \left(\frac{d(r_1 + r_2)}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left((r_1 + r_2) \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \vec{u}_{1\theta}$$

Comme il n'y a pas de force suivant $\vec{u}_{1\theta}$, on obtient finalement $\vec{F} = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{1r}$ et $0 = \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \right)$, c'est-à-dire $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$ constante.

- b. L'énergie potentielle est essentiellement celle du ressort, c'est-à-dire $E_p = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2$ et l'énergie totale s'écrit

$$E_T = \frac{1}{2} \left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + k(r - r_0)^2 \right)$$

En tenant compte que $C = r^2\dot{\theta}$ et en posant $\omega_0^2 = k/m$ il vient finalement

$$E_T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \omega_0^2 (r - r_0)^2 \right)$$

3. Prenant en compte les conditions initiales on peut écrire $C = r_0^2 \omega$ et $E_T = \frac{1}{2} m r_0^2 \omega^2$.

Soit en posant $u = r/r_0$ et $\alpha = \omega/\omega_0$ et après simplification

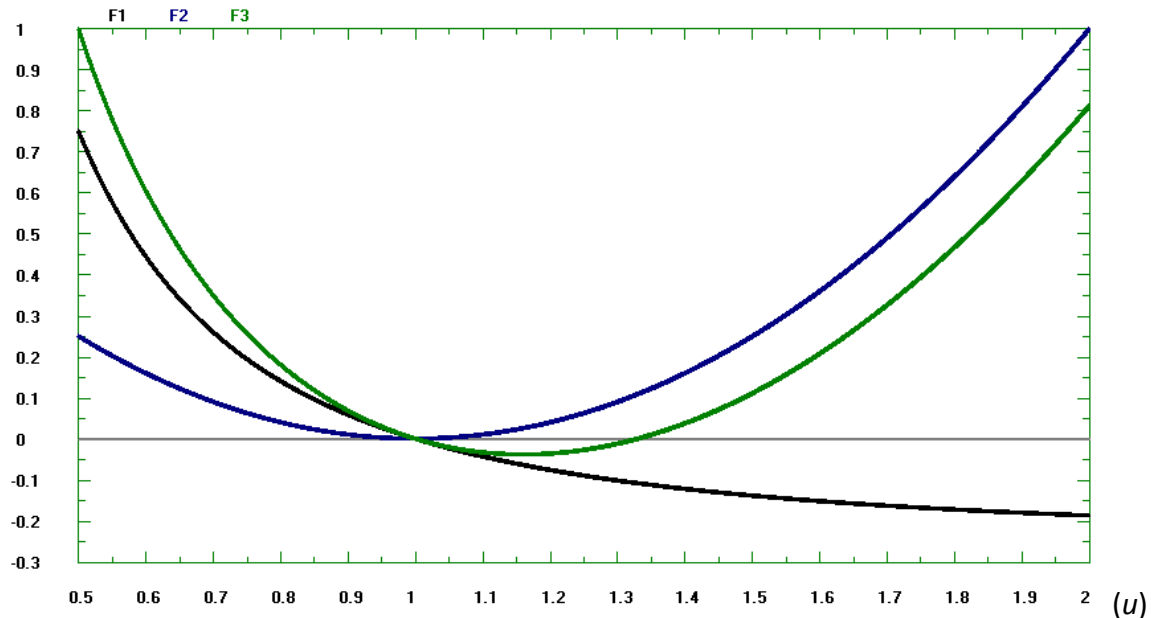
$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 \left(\alpha^2 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right) = 0$$

On a donc $F(u) = 1$ et $G(u) = \omega_0^2 \left(\alpha^2 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right)$.

Pour montrer que u , et donc r , oscille entre deux valeurs on trace l'allure des fonctions $F_1 = \alpha^2 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right)$ et $F_2 = (u - 1)^2$ en fonction de u , ce qui permet d'obtenir l'allure de leur somme.

C'est ce qui est fait sur la figure ci-dessous avec la fonction $F1$ en noir, la fonction $F2$ en bleu et la fonction $F3$ ($G(u)$) en vert, respectivement. Pour ce tracé la valeur de α a été fixé à $\alpha = 0,5$.

Pour cet exercice le candidat ne dispose pas du logiciel de tracé de courbe utilisé pour tracer la figure ci-dessus. L'examineur attend de lui qu'il trace rapidement l'allure de chacun des termes de la fonction $G(u)$ ainsi que leur somme pour arriver à la conclusion ci-dessous.



On constate que $G(u)$ s'annule pour $u = 1$ (solution évidente) et pour $u = u' > 1$, deux valeurs qui correspondent à l'annulation de la vitesse $\dot{u} = 0$ et donc aux deux extrémités de la trajectoire. On peut donc prévoir que u varie entre deux valeurs extrêmes, 1 et u' , au cours du mouvement

4. Le logiciel Equadif, mis à la disposition du candidat, trace les variations au cours du temps de $u(t)$ ainsi que la trajectoire vue de dessus.

Dans le logiciel on peut changer les valeurs de α en jouant sur les conditions initiales. Une fois le fichier `i41018.eqd` chargé (Menu Fichier / ouvrir ou Ctrl-O), on peut tracer les courbes à l'aide de Ctrl-T et les effacer avec Ctrl-E. Les conditions initiales s'affichent à l'aide de Menu Equations / Conditions Initiales ou Ctrl-I. Changer la valeur de θ_0 cliquer sur OK puis sur Ctrl-T pour tracer les nouvelles courbes. À la question « Continuer le calcul ? » on pourra répondre OUI pour observer la trajectoire $y(x)$ sur des temps plus importants.

On constate que u varie périodiquement entre deux valeurs limites, l'une d'entre elles étant la valeur à l'origine. La trajectoire montre en outre une rotation autour de l'origine. Il est possible de faire varier α et on constate que la valeur maximale atteinte par u dépend directement des valeurs de α .

L'interprétation passe par l'étude de $G(u)$. Cette fonction représente l'énergie potentielle effective du système.

Un des termes $\alpha^2 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right)$ correspond à l'énergie potentielle de la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) tandis que l'autre $(u - 1)^2$ correspond à l'énergie potentielle du ressort. À l'instant initial, le ressort n'étant ni tendu ni comprimé, seule la force d'inertie d'entraînement joue un rôle et les deux masses tendent à s'éloigner l'une de l'autre ainsi qu'à tourner autour de leur centre de gravité, la vitesse de rotation étant fixée par la valeur de α . Le ressort exerce alors une force de rappel qui augmente avec la distance les séparant jusqu'à l'emporter sur la force d'inertie. Les deux masses se rapprochent alors jusqu'à atteindre à nouveau la distance initiale (conservation de l'énergie), instant à partir duquel le mouvement se répète d'où la périodicité. L'amplitude du mouvement dépend de la valeur de α ce qui se constate aisément avec le logiciel, puisque la force d'inertie d'entraînement est proportionnelle à α^2 .

On peut noter que lorsque α tend vers 0 l'amplitude des variations de u diminue. La trajectoire se rapproche alors d'une trajectoire circulaire de rayon $r = r_0$.

Si on reprend l'équation

$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 \left(\alpha^2 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right) = 0$$

dans laquelle on fait tendre α vers 0, il reste alors

$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 (u - 1)^2 = 0$$

qui admet pour solutions $u = 1$ et $\dot{u} = 0$.

En conséquence la trajectoire tend bien vers un cercle de rayon r_0 . Toutefois, il est clair que l'on ne peut pas atteindre une trajectoire parfaitement circulaire car si α tend vers 0 cela signifie que le système est lancé avec une vitesse orthogonale nulle. En d'autres termes que le système reste parfaitement immobile !