

Corrigé

1. Le calcul des coefficients de la décomposition en série de Fourier est grandement simplifié si le candidat prend en compte la forme du signal. L'examinateur attend évidemment que le candidat fasse ces quelques remarques simplificatrices avant de se lancer dans des calculs qui n'auraient aucun intérêt.

Tout d'abord la valeur moyenne du signal est nulle donc $a_0 = 0$. Ensuite, la fonction décrivant le signal est impaire donc $a_n = 0, \forall n$.

Enfin, le calcul donne $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}, \forall p \in \mathbb{N}$.

Ce qui donne,

$$V_e(t) = \sum_0^{\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t)$$

2. Le calcul de la fonction de transfert est assez simple. Si on appelle I le courant à l'entrée, on peut écrire $V_e = RI$ et $V_s = -\frac{I}{jC\omega}$ soit sous forme complexe $\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{jRC\omega}$ ou sous forme intégrale $V_s = -\int \frac{V_e}{RC} dt$.

Le circuit est donc un circuit intégrateur.

Si le signal d'entrée est un créneau symétrique on doit donc obtenir un signal triangulaire symétrique en sortie.

Le logiciel AnHarm permet d'étudier ce type de circuit. Charger le fichier `i31019a.fct` (Fichier/Ouvrir ou CTRL+O). Le logiciel précise que le montage est instable : tracer malgré tout le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert. On obtient une pente constante de -20 dB/decade typique d'un circuit intégrateur. On trace la réponse du circuit à partir du menu (Oscilloscope/Permanent/Rectangulaire puis répondre OK). On observe bien qu'un créneau symétrique en entrée donne un signal triangulaire symétrique en sortie.

Comme le logiciel annonce que le montage est instable, il n'est pas trop difficile au candidat de répondre à la question du problème soulevé par ce montage. Toutefois, l'examinateur attend évidemment que le candidat précise les raisons de ce problème.

Le problème de ce type de montage est donc son instabilité. En effet, quand $\omega \rightarrow 0$ alors $V_s \rightarrow +\infty$. On peut remédier à ce problème en plaçant une résistance en parallèle sur la capacité C . Si on choisit une résistance R la fonction de transfert s'écrit

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En basse fréquence ($\omega RC \ll 1$) on a simplement $V_s = V_e$ et en haute fréquence on retrouve l'expression précédente. Le montage est alors un filtre de type passe-bas avec une pulsation de coupure $\omega = 1/RC$.

Le calcul des coefficients de Fourier est grandement simplifié si le candidat remarque que V_s est proportionnelle à l'intégrale de V_e . Il n'est pas nécessaire de trouver une expression temporelle de V_s puis de calculer les coefficients à partir des équations données dans l'énoncé. Il suffit d'intégrer l'expression trouvée au 1 ce qui donne finalement

$$V_s(t) = \sum_0^{\infty} \frac{2ET}{RC((2p+1)\pi)^2} \cos((2p+1)\omega t)$$

où T est la période du signal. Les seuls coefficients non nuls sont les

$$a_{2p+1} = \frac{2ET}{RC((2p+1)\pi)^2}$$

Le logiciel permet une étude de Fourier des signaux d'entrée et de sortie. Choisir par exemple [Fourier/Entrée/Reconstruction] et conserver le nombre d'harmoniques proposé par le logiciel (10). Il est clair que 10 harmoniques ne suffisent pas à reconstituer le signal d'entrée. En changeant le nombre d'harmoniques impliquées on constate que même une centaine d'harmoniques reste insuffisant.

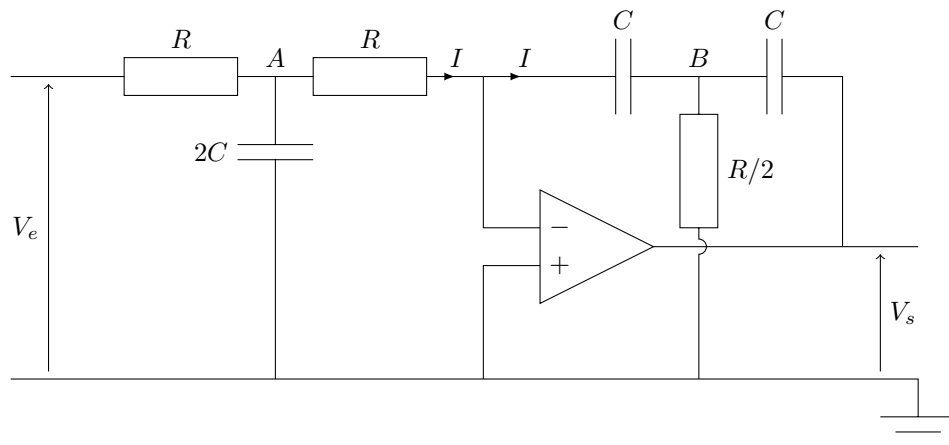
En ce qui concerne la sortie [Fourier/Sortie/Reconstruction], on peut constater que 10 harmoniques suffisent pour reconstruire le signal triangulaire.

L'étudiant peut fournir deux explications. L'examineur appréciera d'avoir les deux !

Une première est qualitative : les ruptures de pente d'un signal rectangulaire sont beaucoup plus abruptes que les ruptures de pente d'un signal triangulaire et donc il faut des harmoniques de fréquences élevées pour les reproduire.

La deuxième est mathématique : les coefficients des harmoniques décroissent en $1/n$ pour le signal rectangulaire et en $1/n^2$ pour le signal triangulaire. Dans la reconstitution les harmoniques de haute fréquence ont donc un poids beaucoup plus faible pour un signal triangulaire que pour un signal rectangulaire.

- On peut mener le calcul en appliquant le théorème de Millman en différents points du circuit mais on peut aussi remarquer que la borne « - » de l'amplificateur opérationnel est virtuellement reliée à la masse.



On calcule alors

$$Z_A = \frac{R}{1 + 2jRC\omega}$$

impédance donnée par la résistance R en parallèle sur la capacité $2C$, ainsi que

$$Z_B = \frac{R}{2 + jRC\omega}$$

impédance donnée par la résistance $R/2$ en parallèle sur la capacité C .

On peut ainsi écrire $V_A = \frac{Z_A V_e}{Z_A + R}$ et $I = \frac{V_A}{R}$ ainsi que $V_B = \frac{Z_B V_s}{Z_B + \frac{1}{jC\omega}}$ et $I = -V_B jC\omega$

ce qui conduit à

$$\frac{\frac{1}{R} \frac{R V_e}{1 + 2jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + 2jRC\omega}} = \frac{\frac{-R jC\omega V_s}{2 + jRC\omega}}{\frac{R}{2 + jRC\omega} + \frac{1}{jC\omega}}$$

Après simplification on obtient

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{(jRC\omega)^2}$$

sous forme complexe, ou bien

$$V_s = -\frac{1}{(RC)^2} \iint V_e dt$$

sous forme intégrale.

Le circuit est donc un double intégrateur et, si la tension d'entrée est un signal créneau symétrique, la tension de sortie est composée d'arcs de paraboles. On peut calculer simplement la décomposition en série de Fourier en intégrant le résultat de la question 2, ce qui conduit à

$$V_s(t) = \sum_0^{\infty} \frac{ET^2}{(RC)^2((2p+1)\pi)^3} \sin((2p+1)\omega t)$$

4. Les questions suivantes ne sont pas incluses dans l'énoncé mais l'examinateur peut éventuellement les poser, d'autant que le logiciel annonce que le montage est instable.

Stabilité du montage ?

Le montage est instable puisque comme pour la question 2 si $\omega \rightarrow 0$ alors $V_s \rightarrow +\infty$

Que se passe-t-il si on relie la sortie à l'entrée ?

À cause de l'instabilité on obtient un oscillateur de période $T = 2\pi RC$.

Utiliser AnHarm pour charger le fichier **i31019b.fct** et tracer le diagramme de Bode en gain malgré l'instabilité. On obtient une pente constante de -40 dB/décade qui est caractéristique d'une double intégration. Le tracé des signaux montre que le signal de sortie est proche d'une sinusoïde : ce n'en est pas une ! Les examinateurs seraient reconnaissants aux candidats de ne plus asséner une telle réponse : l'intégrale double d'un signal rectangulaire N'EST PAS une sinusoïde !

L'utilisation du menu Fourier montre cependant que le signal obtenu est proche d'une sinusoïde puisque deux harmoniques (la 1 et la 3, la deux n'existant pas) suffisent pour reconstituer le signal de sortie. La raison est que les coefficients de Fourier sont en $1/n^3$ et donc tendent vers 0 très rapidement.