Concours Centrale-Supélec

Oral

Physique 1

PC

Exercice avec préparation : Ondes acoustiques planes dans un pavillon

On considère un tuyau ayant la forme d'un pavillon de révolution autour de l'axe Ox. Le rayon à l'abscisse x est $R(x)$, fonction croissante de x. On appellera $S(x) = \pi R^2(x)$ la section. Le pavillon contient de l'air dans lequel on étudie la propagation, selon Ox, d'ondes sonores planes longitudinales.

La situation perturbée par l'onde se caractérise, à l'instant t, pour la section de fluide qui était en x, au repos, par :

- le petit déplacement $\xi(x,t)$ selon Ox,
- la vitesse $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x$,
- la surpression $p(x,t)$.

On note μ et χ les valeurs au repos de la masse volumique et de la compressibilité isentropique de l'air.

1. En considérant le système fermé constitué d'un cylindre d'axe Ox et de section $\sigma < S(x)$, situé au repos entre x et $x + \mathrm{d}x$, établir :
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\frac{\partial u}{\partial t}$$
2. En étudiant l'évolution du volume d'une tranche d'air délimitée par la paroi depuis une situation de repos entre x et $x + \mathrm{d}x$, jusqu'à la situation perturbée à l'instant t, établir :
$$\frac{\partial (Su)}{\partial x} = -\chi S\frac{\partial p}{\partial t}$$
3. Déduire les *deux* équations de propagation vérifiées par u et p. On introduira $c = \dfrac{1}{\sqrt{\chi\mu}}$.
4. Dans le cas d'un pavillon exponentiel : $R(x) = R_0e^{mx}$, que deviennent ces équations ? On constatera que u et p obéissent alors à la même équation.
5. On cherche, en notation complexe, des solutions de la forme : $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{i\omega t}$. À quelle équation satisfait $\underline{U}(x)$? Quelles sont les formes de solution selon les valeurs de la pulsation ω. À quelle condition sur la propagation est-elle possible ? Introduire une pulsation de coupure ω_c.
6. Préciser la relation de dispersion. On se limite, par la suite à une propagation vers les $x > 0$, définir et obtenir la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g.
7. Relier $\underline{p}$ à $\underline{u}$. En déduire leurs notations réelles si l'on convient d'une phase nulle pour $u(0,0)$.
8. On rappelle que $e_p = \frac{1}{2}\chi p^2$. Calculer les densités volumiques d'énergie cinétique $\langle e_c\rangle$, potentielle $\langle e_p\rangle$ et mécanique $\langle e\rangle$. En déduire l'énergie mécanique moyenne de la tranche d'air qui, au repos, est située entre x et $x + \mathrm{d}x$. Déterminer la puissance moyenne $\langle P\rangle$ fournie au niveau de l'abscisse x au repos, par le gaz de gauche au gaz de droite. Déduire la vitesse de propagation de l'énergie et la comparer à v_g. Commenter.
9. *Application numérique.* $c = 340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer m pour que la fréquence de coupure soit $f_c = 50$ Hz. Quelles sont les vitesses de phase et de groupe pour $f = 100$ Hz ? À partir de quelles fréquences sont-elles égales à c à 1% près ?

Exercice sans préparation : Source radioactive

Une source radioactive, placée en un point O, émet des protons, à raison de N par seconde, de façon isotrope et permanente.

1. Déterminer le vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$, en coordonnées sphériques, dans tout l'espace.

2. Déduire la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ créé dans tout l'espace par cette distribution.