CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Physique 1

PC

Éléments de correction

Ondes acoustiques planes dans un pavillon

1. $\mu\sigma \mathrm{d}x\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\left(p(x,t) - p(x+\mathrm{d}x,t)\right)$ d'où $\mu\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

   Selon l'énoncé, x est la position de repos d'une section de fluide et non sa position à t en situation perturbée. C'est pourquoi l'accélération est rigoureusement la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps. En revanche la linéarisation liée à la faiblesse de la perturbation a permis de remplacer $p(x+\xi(x,t),t)$ par $p(x,t)$.

   Si le candidat propose d'exploiter l'équation d'Euler, il prend la liberté de considérer x comme la position à t de la section de fluide et c'est l'expression de l'accélération qui est linéarisée (approximation acoustique) tandis que le terme de force devient rigoureux. L'examinateur est attentif à l'argumentation du candidat.

2. $V_0 = S\mathrm{d}x$ et $V - V_0 = \dfrac{\partial(S\xi)}{\partial x}$ ainsi $\dfrac{V-V_0}{V_0} = \dfrac{1}{S}\dfrac{\partial(S\xi)}{\partial x}$.

   Mais $\dfrac{1}{V_0}\dfrac{V-V_0}{P-P_0} \simeq -\chi$ soit $\dfrac{V-V_0}{V_0} \simeq -\chi p$ donc $\dfrac{\partial(S\xi)}{\partial x} = -\chi S p$.

   Dérivons par rapport au temps : $\dfrac{\partial(Su)}{\partial x} = -\chi S(x)\dfrac{\partial p}{\partial t}$.

3. $\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial(Su)}{\partial x}\right)}{\partial x}$ soit $\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial(Su)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

   $$\chi S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\left(S(x)u\right)}{\partial x\partial t} = -\frac{\partial\left(S(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\left(S(x)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)}{\partial x} \text{ soit } \frac{\partial\left(S(x)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{c^2}S(x)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

4. $R(x) = R_0 e^{mx}$ donc $S = S_0 e^{2mx}$ et $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 2mS(x)$

   $$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2mu\right)}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ soit } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

   $$S\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2mS\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{ soit } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

5. $\underline{u} = \underline{U}(x)e^{i\omega t}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} + 2m\dfrac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{U}(x) = 0$ $\qquad \Delta = 4\left(m^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)$

   a. Si $\omega < \omega_c = mc$ alors $\Delta > 0$ et $r = -m \pm \sqrt{m^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}$ (racines réelles négatives $-\alpha$ et $-\beta$).

      Donc $\underline{U}(x) = \underline{A}e^{-\alpha x} + \underline{B}e^{-\beta x}$ soit $\underline{u}(x,t) = \underline{A}e^{-\alpha x}e^{i\omega t} + \underline{B}e^{-\beta x}e^{i\omega t}$: vibrations atténuées et sans propagation.

   b. Si $\omega > \omega_c = mc$ alors $\Delta < 0$ et $r = -m \pm i\sqrt{\dfrac{\omega_2}{c^2} - m^2} = -m \pm \dfrac{i}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$.

Donc $\underline{U}(x) = \left(\underline{A}e^{-\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}x} + \underline{B}e^{\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}x}\right)e^{-mx}$ soit $\underline{u}(x,t) = \left(\underline{A}e^{i(\omega t-kx)} + \underline{B}e^{i(\omega t+kx)}\right)e^{-mx}$ avec $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c}$: superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans des sens opposés et dont l'amplitude décroit quand x croit.

6. Relation de dispersion : $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$ donc $2k\mathrm{d}kc^2 = 2\omega\mathrm{d}\omega$.

   Vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c$ (vitesse de propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω).

   Vitesse de groupe $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{c^2k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c$ (vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes de pulsations voisines de ω).

7. $\underline{u}(x,t) = Ae^{i\omega t}e^{-(m+ik)x}$ donc $u(x,t) = Ae^{-mx}\cos(\omega t - kx)$.

   Mais $S\underline{u} = AS_0e^{i\omega t}e^{(m-ik)x}$ d'où $\dfrac{\partial(S\underline{u})}{\partial x} = (m-ik)S\underline{u} = -\chi Si\omega\underline{p}$ soit $\underline{p} = \dfrac{k+im}{\chi\omega}\underline{u}$.

   Donc $p(x,t) = \dfrac{A}{\chi\omega}e^{-mx}\left(k\cos(\omega t-kx) - m\sin(\omega t-kx)\right)$.

8. $e_c = \frac{1}{2}\mu u^2$ donc $\langle e_c\rangle = \frac{1}{4}\mu A^2e^{-2mx}$.

   $e_p = \frac{1}{2}\chi p^2$ donc $\langle e_p\rangle = \dfrac{1}{4}\dfrac{\chi A^2}{\chi^2\omega^2}e^{-2mx}(k^2+m^2)$ mais $k^2+m^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ (relation de dispersion).

   Donc $\langle e_p\rangle = \dfrac{1}{4}\dfrac{A^2}{\chi c^2}e^{-2mx} = \dfrac{1}{4}\mu A^2e^{-2mx} = \langle e_c\rangle$ et $\langle e\rangle = 2\langle e_c\rangle = \frac{1}{2}\mu A^2e^{-2mx}$.

   $\langle E_{x,x+\mathrm{d}x}\rangle = \langle e\rangle S\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu A^2S_0\mathrm{d}x$ est indépendant de x.

   $P = pSu = \dfrac{A^2S_0}{\chi\omega}\left(k\cos^2(\omega t-kx) - \dfrac{m}{2}\sin\left(2(\omega t)kx)\right)\right)$ donc $\langle P\rangle = \dfrac{kA^2S_0}{2\chi\omega}$ est indépendant de x.

   $\langle P\rangle\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mu A^2S_0V_{\text{énergie}}\mathrm{d}t$ donc $V_{\text{énergie}} = \dfrac{k}{\chi\mu\omega} = \dfrac{kc^2}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi} = v_g$ conformément à l'absence d'absorption qui explique également l'invariance en x de $\dfrac{\langle E_{x,x+\mathrm{d}x}\rangle}{\mathrm{d}x}$ et de $\langle p\rangle$.

9. $m = \dfrac{\omega_c}{c} = \dfrac{2\pi f_c}{c} = 0{,}924$. $\dfrac{\omega}{\omega_c} = 2$ donc $v_\varphi = \dfrac{2c}{\sqrt{3}} = 393\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_g = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = 294\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

   Si $\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \ll 1$ alors $v_\varphi \simeq c\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$ et $v_g \simeq c\left(1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$.

   On souhaite que $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2 < 10^{-2}$ donc $\omega > \dfrac{10\omega_c}{\sqrt{2}}$ soit $f > 354$ Hz.

Source radioactive

1. En considérant l'isotropie de la distribution de courant, on obtient $\vec{\jmath} = \dfrac{Ne}{4\pi r^2}\vec{u}_r$. N s'exprime en $\mathrm{s^{-1}}$, e en C et j en $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$.

2. Tout plan contenant O et passant par M est un plan de symétrie de la distribution de courant $\vec{\jmath}$; comme $\vec{B}(M)$ doit être orthogonal à chacun des plans, on en déduit que $\vec{B}(M) = \vec{0}$.