On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, espace muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On choisit un élément R fixé de E.

Pour tout $P \in E$, tout x réel on note

$$u(P)(x) = \int_0^1 R(x+t)P(t)\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que pour tout P de E, $u(P)$ est une fonction polynôme de degré au plus n. Montrer que u définit un endomorphisme de E.
2. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

On suppose dans la suite de l'exercice que $R(x) = x^n$.

3. Montrer que u est un isomorphisme de E.
4. Soit $(P_0, ..., P_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u et soient $\lambda_0, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées ces polynômes. Montrer que
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$
5. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = \dfrac{2^n}{n+1}$
6. On prend $n = 2$. Déterminer λ_0, λ_1 et un couple (P_0, P_1) dans ce cas.
7. On prend $n = 3$. Construire à partir de la base canonique une base orthonormale de E et déterminer la matrice de u dans cette base.