Soit l'espace vectoriel complexe

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle/\; \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x) \right\}$$

muni de la norme définie en posant, $f \in E : \|f\| = \sup\left\{ |f(u)|, u \in R \right\}$.

Si $f \in E$, soit $G(f) = g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\, dt$.

1.
   a. Montrer que G définit un endomorphisme de E.

   b. Déterminer une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait

   $$\|G(f)\| \leqslant C \|f\|$$

   Interpréter le résultat.

2.
   a. Montrer que si $g = G(f)$ avec $f \in E$, alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation : $f = g - g'$.

   b. En déduire une relation entre les coefficients de Fourier $c_n(g)$ et $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, préciser la série de Fourier de g et son mode de convergence.

3.
   a. G est-elle injective ? surjective ?

   b. Préciser selon le complexe λ, l'ensemble $E_\lambda = \left\{ f \in E \;\middle/\; G(f) = \lambda f \right\}$.