

**Exercice 1**

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

**Exercice 2**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ .

1. Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
2. On suppose, dans cette question seulement, que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires.
3. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que

$$\text{Im}(f^k) \oplus \text{Ker}(f^k) = E$$

L'endomorphisme  $f^k$  est-il nécessairement diagonalisable ?

4. Le résultat démontré en 3 reste-t-il valable si l'espace  $E$  est de dimension infinie ?