Concours Centrale-Supélec

Oral

Mathématiques 1

PC

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et k-lipschitzienne. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x+h) - f(x)$$

   Calculer $c_n(f_h)$ en fonction de $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{(kh)^2}{4}$$

3. En utilisant la concavité de la fonction sinus, montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$$

   converge.

4. Que peut-on en conclure ?