1. Soient a un réel strictement négatif et b un réel strictement positif. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles de classe C^∞ sur l'intervalle $]a,b[$ telles que f et toutes ses dérivées successives soient positives ou nulles sur $]a,b[$.

   a. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur l'intervalle $]a,b[$?

   Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{A}$, leur produit fg appartient-il à $\mathcal{A}$?

   Soit f un élément de $\mathcal{A}$. Pour tout $x \in]a,b[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

   b. Justifier que la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   est croissante sur $]0,b[$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$$

   est croissante sur $]0,b[$.

   d. En déduire que si $0 \leqslant x < y < b$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

   e. Justifier l'existence d'un réel strictement positif r tel que la fonction f soit développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$.

2. Démontrer que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$ et donner les 6 premiers coefficients de son développement.