Exercice 1

1. Déterminer trois éléments a, b, c de $\mathbb{C}$, non tous réels, tels que $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$ soient trois réels.

2. Montrer que si a, b, c sont trois éléments de $\mathbb{C}$ de modules différents et si $a+b+c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \in \mathbb{R}$ et $a^3+b^3+c^3 \in \mathbb{R}$, alors a, b et c sont trois réels.

Exercice 2

p, q sont deux entiers strictement positifs. A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

1. Comparer $\ker A$ et $\ker B$.

2. Soit f (respectivement g) l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ de matrice A (respectivement B) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^q, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$$

3. Soient $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ et $(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_r)$ deux bases d'un espace F, euclidien, de dimension r vérifiant
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2, \quad \langle \varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon'_i,\varepsilon'_j\rangle$$
Montrer qu'il existe une application orthogonale s de E telle que $\forall i \in \{1,\dots,r\}, s(\varepsilon_i) = s(\varepsilon'_i)$.

4. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ tel que $A = UB$.