



Abreuvoir, la nuit

Un abreuvoir pour animaux est un récipient cylindrique de rayon $R = 1$ m contenant de l'eau ; ses faces latérales sont thermiquement bien isolées et il se refroidit, la nuit, sur une durée totale de huit heures.

On notera $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stefan, $\rho = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de la couche de glace qui se forme, $L_f = 3,34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ la chaleur latente massique de fusion de la glace à la température $T_f = 273 \text{ K}$ et $\lambda = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la conductivité thermique de la glace.

On considère que le refroidissement et le brassage de l'abreuvoir conduisent d'abord à former une masse d'eau liquide entièrement à la température T_f qui se recouvre d'une très mince couche de glace ; celle-ci croît ensuite au fur et à mesure que la surface de la glace se refroidit. On note $T(t)$ la température de surface de la glace, avec $T(0) < T_f$ au début de la nuit.

1. Le système ne se refroidit que par rayonnement

- a. La couche de glace, d'épaisseur $e(t)$, sera traitée en régime quasi-permanent : on néglige en particulier la capacité thermique de la glace.

En déduire la relation exprimant $e(t)$ en fonction de $T(t)$ et des données du problème.

- b. Expliciter l'équation différentielle donnant $T(t)$. Au moyen d'un logiciel de calcul formel (on pourra utiliser la feuille de calcul Maple jointe), résoudre cette équation et tracer $T(t)$ et $e(t)$ pour $T(0) = 270 \text{ K}$.

Quelle est, au matin, l'épaisseur de glace formée ?

2. On tient aussi compte d'échanges pariétaux convecto-conductifs entre l'air ambiant (à température T_f) et la surface de la glace ; on notera $h = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ le coefficient de la loi de Newton.

Au matin, la couche de glace sera-t-elle plus ou moins épaisse que dans le modèle précédent ?

Vérifier, quantitativement.

3. Quelle(s) vérification(s) proposez-vous concernant l'hypothèse de régime thermique quasi-stationnaire dans la couche de glace ?