



On considère le système différentiel S suivant :

$$S : \begin{cases} x'(t) = x(t)(10 - x(t) - y(t)) \\ y'(t) = y(t)(-6 + x(t) - y(t)) \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, il est fortement conseillé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour les calculs.

1. Déterminer l'unique solution (x, y) de S avec x et y fonctions constantes non nulles.

Dans la suite, on notera α, β les valeurs respectives de ces fonctions constantes x et y .

2. À l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer l'allure des solutions vérifiant respectivement les conditions initiales suivantes :

$$(x(0), y(0)) \in \{(10, 10), (1, 1), (2, 6)\}$$

Que remarquez-vous ?

Soit maintenant $X = (x, y)$ une solution maximale de S . On va justifier l'existence d'un voisinage U de $\Omega = (\alpha, \beta)$, dans $\mathbb{R}^2$ tel que, s'il existe t_0 pour lequel $X(t_0)$ appartient à U , alors la solution X est définie sur $[t_0, +\infty[$ et converge vers Ω à vitesse exponentielle.

3. Calculer la matrice jacobienne de l'application $f : (x, y) \mapsto ((x(10 - x - y), y(-6 + x - y))$ au point Ω et déterminer ses valeurs propres.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont complexes non réelles et qu'on note $a + ib$ et $a - ib$. Justifier que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ noté $(\cdot | \cdot)$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (AX | X) = a\|X\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

5. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que

$$\forall X \in B(\Omega, r), \quad (f(X) - f(\Omega) | X - \Omega) \leq -\|X - \Omega\|^2$$

Conclure à l'aide de l'application $t \mapsto \|X(t) - \Omega\|^2$