



Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies, continues et bornées sur $\mathbb{R}_+^*$

Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f(x)|$

On considère un réel $a \in]0, 1/4[$ et une fonction $Q : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que pour tout $x > 0$, $0 \leq Q(x) \leq a$.

1. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n^2 + a \end{cases}$$

a. On choisit ici $a = 1/8$. Tracer, avec le logiciel de calcul formel, les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^2 + 1/8$ et $x \mapsto x$ sur $[0, 4]$.

b. On revient au cas général. Démontrer que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. Soit $u \in E$. Démontrer que la fonction

$$\mathcal{F}(u) : x > 0 \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

est un élément de E .

3. On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mathcal{F}(u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq u_n(x) \leq \lambda_n$.

b. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

On suppose ici que $Q(x) = e^{-x}/8$.

Calculer u_n pour $n \in \{1, \dots, 7\}$ et tracer les graphes de ces fonctions sur l'intervalle $]0, 4]$.

4. On revient au cas général.

a. Démontrer que la série de fonctions $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

b. Démontrer qu'il existe une fonction $u \in E$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

c. Conclure que u est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle.