CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 2

MP

On pose, pour z complexe

$$\begin{cases} P(z) = z^3 - 1 \\ F(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)} \quad \text{si } z \text{ est non nul} \end{cases}$$

Soit r un réel de $]0,1[$ et D le disque fermé de centre 1 et de rayon r.

On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Les différents calculs de cet exercice doivent être menés avec le logiciel de calcul formel.

1.
   a. Calculer (u_n) pour $n \in \{1, .., 10\}$ lorsque $u_0 = 1 + i$ puis $u_0 = -1 + i$

   b. Montrer que pour tout z de D

   $$|F(z) - 1| \leqslant \frac{2r+3}{3(1-r)^2}|z-1|^2$$

   c. Montrer que si $r = 1/3$ alors $F(D) \subset D$.

   d. En déduire que pour u_0 suffisamment proche de 1, la suite (u_n) est bien définie et converge vers 1.

2. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 pour laquelle il existe a dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(a) = 0$ et que $df(a)$, la différentielle de f en a, est inversible.

   On pose pour u dans $\mathbb{R}^2$, $F(u) = u - df(u)^{-1}(f(u))$ et on définit encore une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Calculer $F(a)$ et montrer que F est bien définie sur un voisinage de a.

   b. Cette question est à résoudre avec le logiciel de calcul formel. On suppose uniquement dans cette question, que $f(x,y) = (x + y - 3,\ xy - 2)$ et $a = (1,2)$.

   Calculer F et sa différentielle en a puis calculer u_n pour $n \in \{1, \dots, 10\}$ lorsque $u_0 = (6,10)$ puis $u_0 = (-6,10)$.

   On revient au cas général.

   c. Montrer que F est différentiable en a de différentielle nulle.

   d. En déduire que la suite (u_n) converge vers a si u_0 est assez proche de a.

   e. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite (u_n) si l'on suppose que F est de classe C^2 ?