Mathématiques 2

MP

L'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne orientée canonique est rapporté au repère canonique orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\, i,j,k)$. On considère les plans P_1 d'équation $y = 0$ et P_2 d'équation $x = 0$.

On appelle écart angulaire de deux plans affines P, P' dont n, n' sont des vecteurs normaux unitaires, le réel $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos\theta = |(n \mid n')|$.

1. Déterminer, par leur équation cartésienne, les plans P passant par O, faisant avec P_1 et P_2 les écarts angulaires suivants : $(P_1,P) = \pi/4$ et $(P_2,P) = \pi/3$.

   On désigne désormais par P_3 le plan d'équation $x + \sqrt{2}y + z = 0$.

2.

   a. Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la surface (Σ) ensemble des points M tels que

   $$\sum_{i=1}^{3} d^2(M,P_i) = 1$$

   b. Avec le logiciel de calcul formel, visualiser la surface obtenue puis justifier précisément sa nature.

3. Soit W le vecteur unitaire

   $$W = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{2}i + j\,)$$

   On recherche les plans parallèles à la direction W dont la section avec (Σ) est un cercle.

   a. Quels sont les vecteurs U unitaires orthogonaux à W ? Utiliser un repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (O,\, U,V,W)$ pour résoudre le problème posé. Il est demandé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour effectuer les calculs et pour rechercher l'équation de (Σ) dans $\mathcal{R}'$.

   b. Montrer qu'on obtient deux directions de plans possibles. Préciser les équations cartésiennes dans le repère $\mathcal{R} = (O,\, i,j,k)$ des plans qui conviennent. Pour chacune des directions, visualiser avec le logiciel l'une des sections circulaires obtenues.