Dans cet exercice, on confondra polynôme et fonction polynomiale.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 P_n(t)Q_n(t)dt = Q(0)$$

2. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

   a. Calculer les polynômes P_n pour $n = 0, \ldots, 5$. On pourra déterminer chaque P_n en résolvant un système de $n+1$ équations.

   b. Sur un même graphique, représenter $P_0, \ldots, P_5$ sur l'intervalle [0,1].

3. Montrer que P_n s'annule n fois sur l'intervalle]0,1[. Que peut-on en conclure pour P_n ?

4.

   a. Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale

$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$

   est-elle définie ?

   b. À l'aide du logiciel de calcul formel, obtenir une expression de

$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$

   pour $n = 0, \ldots, 3$ sous forme d'une fraction rationnelle factorisée.

   Déterminer alors la valeur de cette intégrale pour tout n.

   c. Calculer $P_n(0)$.

   d. Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\max\{|Q(0)|/Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 Q^2(t)dt = 1\}$$

5.

   a. Déterminer un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et une propriété P convenable faisant de la famille (P_n) l'unique famille de polynômes échelonnée en degré, orthogonale pour ce produit scalaire et vérifiant la propriété P.

   b. Retrouver ainsi, par une autre méthode, les polynômes $P_0, \ldots, P_5$ de la question 2.

BY-NC-SA