On définit une suite d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par : $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ et pour $n \geqslant 4$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$.

L'objectif de l'exercice est de montrer la propriété

(P) : pour tout entier premier p, l'entier u_p est divisible par p

1. Cette question doit être traitée avec le logiciel de calcul formel.

   a. Écrire une fonction permettant de calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   b. Vérifier que (P) semble satisfaite en se limitant aux mille plus petits entiers premiers.

2. On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de $P(X) = X^3 - X - 1$ dans $\mathbb{C}$. On définit la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n t^n$$

   de la variable réelle t et on note $f(t)$ sa somme.

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$. Préciser le rayon de convergence R de la série entière.

   b. Pour tout $t \in \left]-R,R\right[$, montrer que

$$f(t) = \frac{2t^2 + 3t^3}{1 - t^2 - t^3}$$

   c. On définit l'application $t \mapsto \varphi(t) = -\ln(1 - t^2 - t^3)$. On note le développement en série entière de φ à l'origine :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t_n$$

   Établir une relation entre u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   d. Soit p un entier premier. Montrer que v_p est un rationnel dont le dénominateur (dans la forme simplifiée de v_p) est premier avec p. En déduire que u_p est divisible par p.