



1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois complexes deux à deux distincts et $P_k(X) = (X - \lambda_k)^{m_k}$, avec $m_k \geq 1$ pour $k = 1, 2, 3$ trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

Montrer qu'il existe un polynôme $U_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que P_1 divise $U_1 P_2 P_3 - 1$.

On choisit de même U_2 tel que P_2 divise $U_2 P_1 P_3 - 1$ et U_3 tel que P_3 divise $U_3 P_1 P_2 - 1$.

2. On pose alors $P = \lambda_1 U_1 P_2 P_3 + \lambda_2 U_2 P_1 P_3 + \lambda_3 U_3 P_1 P_2$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par P_k pour $k = 1, 2, 3$?

À l'aide du logiciel de calcul formel, construire un tel polynôme P dans le cas où $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 2$.

Indication : on pourra utiliser l'instruction `gcdex(R,S,X,'U','V')` de Maple ou `PolynomialExtendedGCD[R,S,X]` de Mathematica qui fournit un couple U, V dans l'égalité de Bezout pour le pgcd des polynômes P, Q de l'indéterminée X .

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12272 & -2 & 2 & -12267 & -12266 \\ 1 & -1758 & 0 & 2 & -1757 & -1758 \\ -1 & 3802 & -1 & -4 & 3803 & 3805 \\ -1 & -435 & 1 & -1 & -437 & -438 \\ -1 & 1682 & 1 & -1 & 1679 & 1679 \\ 0 & 95 & -1 & -1 & 97 & 97 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de A et de la matrice $P(A)$ où P est le polynôme déterminé à la **question 2**. Les matrices $A, P(A)$ sont-elles diagonalisables ?

4. Soit $n \geq 2$ et B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, le polynôme $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ divise $R - \lambda_i$.

Montrer que la matrice $R(B)$ est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres et les mêmes multiplicités que celles de B .