



1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c existe-t-il $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PB {}^tP$?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PB {}^tP$?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur c existe-t-il $a, b \in \mathbb{R}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PB {}^tP$?

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d existe-t-il $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PBP^{-1}$?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur d existe-t-il $a, c, b \in \mathbb{R}$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$?

3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de $\max_{P, Q \in O_n(\mathbb{R})} \det(PA {}^tP + QB {}^tQ)$.

4. Calculer ce maximum si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\sup_{P, Q \in GL_n(\mathbb{R})} \det(PAP^{-1} + QBQ^{-1})$ est-il fini en général ? (Si oui le montrer, si non donner un contre-exemple)

6. De manière générale, si $A_1, \dots, A_k \in S_2^+(\mathbb{R})$, déterminer $\max_{P_1, \dots, P_k \in O_2(\mathbb{R})} \det(P_1A_1 {}^tP_1 + \dots + P_kA_k {}^tP_k)$.