Soit E un espace euclidien ; on note $\mathcal{O}(E)$ le groupe des endomorphismes othogonaux de E et on définit l'ensemble

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|\}$$

1. Montrer que Γ est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$.

2. Soit $u \in \Gamma$ tel qu'il existe $(f, g) \in \Gamma^2$ vérifiant $f \neq g$ et $u = \frac{1}{2}(f + g)$.

   Montrer que $u \notin \mathcal{O}(E)$.

3. Soit v un automorphisme de E, montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et s un endomorphisme autoadjoint positif de E tels que $v = \rho \circ s$.

   On admet que ce résultat reste valable si on ne suppose plus que v est bijectif.

4. Soit $u \in \Gamma$ qui n'est pas un endomorphisme orthogonal.

   Montrer qu'il existe $(f, g) \in \Gamma^2$ tels que $f \neq g$ et $u = \dfrac{1}{2}(f + g)$.

5. Démontrer le résultat admis à la question 3.