



On note, pour $k \in \{0, 1\}$, S_k l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques, à valeurs complexes telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k c_n(f)|$ converge (où $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de f).

On considère f une fonction de S_1 , r un réel tel que $0 < r < 1$ et on définit f_r par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{inx}$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos(x) + r^2).$$

2. On pose $K_r(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right)$.

Montrer qu'il existe une unique fonction u dans S_0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t) u(t) dt = f_r(x).$$

On déterminera les coefficients de Fourier de u en fonction de ceux de f et on vérifiera que u est indépendante de r .

3. Vérifier que pour $t \in]0, \pi[$,

$$\left| \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right) \right| \leq \ln 2 - 2 \ln |\sin t|$$

4. En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t) u(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) u(t) dt$$

5. Pour $g \in S_0$, on définit $\varphi(g)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) g(t) dt$$

Montrer que φ est un isomorphisme de S_0 sur S_1 .