CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 1

MP

On considère l'équation différentielle $(E) : x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t))$.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique ici.
2. Soit x une solution de (E). Montrer que x est lipshitzienne.
3. Soit x une solution maximale de (E) et $I =]a, b[$ son intervalle de définition.

   Montrer que $I = \mathbb{R}$.
4. Si x est solution maximale de (E) et $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $t \mapsto x(t + k)$ et $k + x$ sont encore solutions.

   Trouver des solutions simples de (E).

On se fixe pour la suite une solution maximale de (E).

5. Montrer que $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) - t$ converge en $\pm\infty$ et exprimer les limites en fonction de $x(0)$.
6. On considère maintenant une solution maximale x de

$$(E_2) \ : \ x'(t) = \frac{1}{1 + x(t)^2} + \cos(2\pi(x(t) - t))$$

   Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et que $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) - t$ est bornée.

BY-NC-SA