



On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1[$, à valeurs réelles et de carré intégrable sur $[0, 1[$.

On note, $\|f\|_2$ la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

On note alors $a_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\int_{-1}^1 P(t) dt + i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$.

En déduire que $\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

3. Vérifier que si $f \in E$, alors $\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k(f) t^k \right) f(t) dt$. En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} a_k(f)^2$ converge et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \leq \pi \|f\|_2^2$$

4. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \right)^{1/2}$. Montrer que N est une norme sur E .

5. Montrer que N n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$. On pourra considérer les fonctions f_p définies, pour $p \leq 1$ par

$$f_p(x) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } x \in [0, 1/p] \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in]1/p, 1[\end{cases}$$