Mathématiques 1

Oral

MP

$n \in \mathbb{N}^*$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que M a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U et que U soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P).

2. Ici $M \in S_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M ait la propriété (P).

3. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$. On admettra qu'une telle décomposition existe encore si M n'est pas inversible.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P). Cette condition portera sur ${}^tMM$.

5. Montrer le résultat admis dans la question 3.