CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématique 1

TSI **2011**

4 heures Calculatrices autorisées

Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions vérifiant le système de conditions suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où φ est une fonction décroissante sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Dans la première partie, on montre l'existence et l'unicité de f vérifiant le système (1). Dans les deux parties suivantes, on étudie des exemples.

I Existence et unicité de la solution du système (1)

I.A – Unicité

Soient f et g deux solutions du système (1).

I.A.1) Soit $x \in I$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x + n \in I$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = g(x) + (-1)^n \left(f(x+n) - g(x+n) \right)$$

I.A.2) En déduire, par un passage à la limite, que $f = g$ sur I.

I.B – Existence

I.B.1) Soit $x \in I$.

Montrer que la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$ converge.

I.B.2) On pose, pour x dans I, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x+k)$.

a) Vérifier que :

$$\forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$$

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et conclure.

II Premier exemple

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Un polynôme sera noté indifféremment P ou $P(X)$.

II.A – Étude d'une application linéaire

Soit θ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \theta(P)(X) = \frac{1}{e} P(X+1) + P(X)$$

où e désigne $\exp(1)$.

II.A.1) Montrer que θ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

II.A.2) Vérifier que θ conserve le degré, c'est-à-dire vérifie, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $\deg\left(\theta(P)\right) = \deg(P)$.

 BY-NC-SA

II.A.3) En déduire que θ est injective.

II.A.4) Montrer que la restriction de θ à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ noté θ_n.

II.A.5) Montrer que θ_n est bijectif.

II.A.6) En déduire que, pour tout Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\frac{1}{e}P(X+1) + P(X) = Q(X)$$

II.A.7) Montrer que, si la fonction φ est de la forme $x \mapsto Q(x)\exp(-x)$ où Q est dans $\mathbb{R}[X]$, la solution du système (1) est de la forme $x \mapsto P(x)\exp(-x)$ où P vérifie $\theta(P) = Q$.

II.B – Exemple

Jusqu'à la fin de cette partie, on s'intéresse à l'unique polynôme P_n tel que :

$$\frac{1}{e}P_n(X+1) + P_n(X) = X^n$$

c'est-à-dire tel que $\theta(P_n) = X^n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

II.B.1) Soit n dans $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que :

$$P_n' = nP_{n-1}$$

b) Exprimer $P_n^{(k)}$ en fonction de P_{n-k} pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.B.2) En déduire, en utilisant la formule de Taylor, que :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$$

II.B.3) Montrer que :

$$P_n(X) = \frac{e}{e+1}X^n - \frac{1}{e+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)$$

II.B.4) Écrire un algorithme en français permettant de calculer $P_n(x)$, n et x étant donnés par l'opérateur. Pour cet algorithme, on suppose l'existence d'une fonction `binomial` telle que `binomial(n,k)` renvoie la valeur $\binom{n}{k}$.

III Deuxième exemple

Jusqu'à la fin de ce problème on prendra $I =]-1, +\infty[$ et $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

III.A – Écriture intégrale de la solution

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

avec la convention $t^0 = 1$.

III.A.1) Montrer que f est bien définie sur I.

III.A.2) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$$

III.A.3) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$$

III.A.4) En déduire que la solution du système (1) est la fonction f définie par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

 BY-NC-SA

III.B – Calcul de quelques valeurs et équivalents

III.B.1) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

III.B.2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

III.B.3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k}$$

III.B.4) Soit x dans I et soit N dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right| \leqslant \frac{1}{x+N+2}$$

b) En déduire un algorithme de calcul de $f(x)$ à ε près, x et ε étant donnés par l'opérateur.

c) Donner $f(1{,}5)$ à 10^{-1} près.

III.B.5) Montrer, sans dérivation, que la fonction f est décroissante sur I.

III.B.6) En déduire que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

III.B.7) Donner, en le justifiant, un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

III.B.8) La série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est-elle convergente ?

III.C – Étude de la fonction f

III.C.1) En utilisant l'expression intégrale de f, montrer que f est continue sur I.

III.C.2) En déduire, à l'aide des conditions (1), la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1 à droite ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de -1 à droite.

III.C.3)

a) Montrer que, pour tout x dans I et pour tout k dans $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^x (\ln t)^k$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Soit x dans I, on pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x (\ln t)^k \, dt$.

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_k(x))_{k \geqslant 0}$ et calculer $I_k(x)$ pour k dans $\mathbb{N}$.

III.C.4) On pose, pour k dans $\mathbb{N}$ et x dans I,

$$\varphi_k(t,x) = \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x$$

a) Montrer que, pour tout x dans I, $t \mapsto \varphi_k(t,x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur I et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \, dt$$

BY-NC-SA

III.C.5)

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}}$$

III.C.6)

a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire vérifiant :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad h(t) = t$$

Montrer que h est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et déterminer les coefficients de Fourier réels de h.

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

c) Calculer $f'(0)$ et donner l'équation de la tangente à l'origine pour la courbe représentant f.

III.C.7) Donner l'allure de la courbe représentant f dans un repère orthonormé.

III.C.8)

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n!}{2} \leqslant |f^{(n)}(0)| \leqslant n!$$

b) En déduire que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence strictement positif et le déterminer.

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA