# Partie I -

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel *impair*, supérieur ou égal à 3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, et sa base canonique est notée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On appelle $A_n$ la matrice carrée d'ordre $n$ définie par :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = (a_{r,s}),\ 1 \le r, s \le n \quad \text{avec } a_{r,s} = \begin{cases} 1 \left( \begin{array}{c} \text{si } r+s = 2 \\ \text{ou si } r+s = n+2 \end{array} \right) \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A_n$.

**I.A -** Calculer $(A_3)^2$ et $(A_5)^2$.

**I.B -** Pour $2 \le j \le n$, déterminer $u^2(e_j)$. En déduire $(A_n)^2$, pour $n$ entier impair supérieur ou égal à 3.

**I.C -** On désigne par $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ le noyau et l'image de l'endomorphisme $u$. Monter que :

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(u - id) \cap \operatorname{Ker}(u + id) = \{0\} \\ \operatorname{Im}(u + id) \subset \operatorname{Ker}(u - id) \\ \dim \operatorname{Ker}(u - id) + \dim \operatorname{Ker}(u + id) = n \end{cases}$$

**I.D -** En déduire que la matrice $A_n$ est diagonalisable. Expliciter une base de vecteurs propres de $A_n$ ainsi qu'une matrice diagonale semblable à $A_n$. Montrer que les sous-espaces propres de $A_n$ sont orthogonaux.

**I.E -** Dans cette question, $E$ est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; $M$ étant un point de $E$, on note $(x, y, z)$ ses coordonnées dans ce repère. Si $k$ est un réel fixé, on note $S_k$ la surface d'équation $x^2 + 2yz = k$.

I.E.1) Montrer qu'il existe un repère orthonormal $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans lequel l'équation de $S_k$ est : $X^2 + Y^2 - Z^2 = k$

Discuter la nature de la surface $S_k$, en distinguant les cas : $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$.

Dans les questions qui suivent, on prend $k = 1$, et $E$ est muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dont l'existence a été prouvée en I.E.1

I.E.2) Soit $M_0$ un point du plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$, appartenant à $S_1$. On notera $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, 0)$ les coordonnées de $M_0$ dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $M_0$ et perpendiculaire à $(OM_0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur un vecteur directeur $\vec{V}$ de $\mathcal{D}$ pour que $\mathcal{D}$ soit incluse dans $S_1$.

I.E.3) Déterminer les droites incluses dans $S_1$ et rencontrant le plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$. Existe-t-il des droites parallèles à $(O; \vec{I}, \vec{J})$ incluses dans $S_1$ ?

I.E.4) Soit $M$ un point de $S_1$ de coordonnées $(X, Y, Z)$ dans $\mathcal{R}$. Montrer qu'il existe un réel $\theta_0$ tel que :

$$\begin{cases} X = \cos\theta_0 - Z\sin\theta_0 \\ Y = \sin\theta_0 + Z\cos\theta_0 \end{cases}$$

En déduire que $S_1$ est la réunion d'une famille de droites qu'on précisera.

# *Partie II -*

Dans cette partie, on prend $n = 5$. On désigne par $\alpha$ le nombre complexe $\alpha = e^{2i\pi/5}$, et par $B$ la matrice de coefficients $b_{r,s} = \alpha^{(r-1)(s-1)}$, pour $1 \le r, s \le 5$.

**II.A -** Vérifier que :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^4 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{C}^5$ est muni de la base canonique, notée $(e_1, e_2, \dots, e_5)$. On appelle $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^5$ dont la matrice dans cette base est $B$, et $u$ l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est $A_5$ que l'on notera désormais $A$.

**II.B -**

II.B.1) Écrire le polynôme $X^5 - 1$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ et montrer qu'il existe 2 réels $a$ et $b$ tels que :

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$$

En déduire la décomposition de $X^5 - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II.B.2) Déduire de ce qui précède l'expression de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\sqrt{5}$.

**II.C -** Calculer $B^2$. Exprimer $B^2$ en fonction de $A$.

**II.D -**

II.D.1) Déduire de ce qui précède que $u o v = v o u$.

II.D.2) Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_5)$ une base de vecteurs propres de $A$ telle que $u_1 = e_1$ (Cf. I.D). Montrer que $A$ admet deux sous-espaces propres et les déterminer à l'aide des $u_i$, $1 \leq i \leq 5$. Montrer que ces sous-espaces propres sont stables par $v$.

II.D.3) Déterminer $v(e_1)$, $v(e_2 + e_5)$, $v(e_3 + e_4)$ en fonction de $e_1$, $e_2 + e_5$ et $e_3 + e_4$. De même, déterminer $v(e_2 - e_5)$ et $v(e_3 - e_4)$ en fonction de $e_2 - e_5$ et de $e_3 - e_4$. En déduire que $B$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} X & | & 0 \\ — & - & — \\ 0 & | & Y \end{bmatrix}$$

où $X$ et $Y$ sont respectivement des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qu'on explicitera.

On notera désormais $E_1$ et $E_{-1}$ (avec $e_1 \in E_1$) les deux sous-espaces propres de $A$.

**II.E -** Soit $v_1$ l'endomorphisme de $E_1$ défini par : $\forall x \in E_1$, $v_1(x) = v(x)$ et $v_2$ l'endomorphisme de $E_{-1}$ défini par : $\forall x \in E_{-1}$, $v_2(x) = v(x)$.

II.E.1) Montrer que $v_2$ est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.

II.E.2) Montrer que $v_1$ est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.

II.E.3) Montrer que $B$ est diagonalisable et semblable à :

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

# Partie III -

Dans cette partie, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 1.

**III.A -** $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ étant des nombres complexes, on note $V_n$ la matrice :

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \det V_n$$

III.A.1) Montrer que :

$$\forall n \geq 2 \qquad \Delta_n = \Delta_{n-1} \times \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i)$$

III.A.2) En déduire la valeur de $\Delta_n$.

**III.B -**

III.B.1) En utilisant par exemple la matrice $D$ (définie au II.E.3), montrer qu'il existe un endomorphisme $g$, ayant toutes ses valeurs propres distinctes, vérifiant $g^2 = v$. On notera $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$, $\mu_5$ ses valeurs propres.

III.B.2) Soit $x$ un vecteur non nul de $\mathbb{C}^5$. On définit la suite $g^n(x)$ par :

$$g^0(x) = x \quad \text{et pour } n \geq 1,\ g^n(x) = g(g^{n-1}(x)) = g \circ g^{n-1}(x)$$

Montrer qu'il existe un entier $p \leq 4$ ($p$ dépendant de $x$) tel que la famille $(g^k(x))_{0 \leq k \leq p}$ est libre et que la famille $(g^k(x))_{0 \leq k \leq p+1}$ est liée.

III.B.3) Montrer qu'il existe des vecteurs $x$ pour lesquels $p = 4$, et caractériser ces vecteurs par leurs coordonnées dans une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ de vecteurs propres de $g$. Un tel vecteur $x$ étant choisi, montrer que $\mathcal{B} = (x, g(x), g^2(x), g^3(x), g^4(x))$ est une base de $\mathbb{C}^5$.

On notera $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ les coordonnées de $g^5(x)$ dans $\mathcal{B}$. Donner la matrice de $g$ dans cette base. En identifiant deux expressions du polynôme caractéristique de $g$ donner l'expression des $a_i$ en fonction des $\mu_j$.

---

**••• FIN •••**

---