Tout le problème se passe dans E_3, espace affine euclidien de dimension 3. Le choix, fait une fois pour toutes, d'une origine O permet d'identifier le point A et le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (à partir de la partie II) et l'écriture

$$A = tB + (1-t)C$$

correspond donc à

$$\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}.$$

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On appelle courbes polynomiales de degré n les courbes qui admettent une représentation du type :

$$t \mapsto M(t) = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \ldots + t^nA_n.$$

L'objectif du problème est d'étudier un procédé de génération de ces courbes à partir d'une ligne polygonale appelée polygone de contrôle (courbes de Bézier). Ce procédé est très utilisé en informatique graphique, l'opérateur choisissant le polygone de contrôle et l'ordinateur calculant la courbe.

Partie I -

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On note B_n^k les polynômes définis par :

$$B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$$B_n^k = 0 \text{ si } k \geq n+1 \text{ et, par convention, si } k < 0.$$

I.A - Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) = 1$$

et que, pour tout k $(k = 0, 1\ldots, n)$ on a :

$$B_n^k(x) = (1-x)B_{n-1}^k(x) + xB_{n-1}^{k-1}(x)$$

I.B - Soit i un entier $(0 \leq i \leq n)$. Montrer que

$$C_n^i x^i = \sum_{k=i}^{n} C_k^i B_n^k.$$

I.C - Montrer que les polynômes B_n^k $(k = 0, 1\ldots n)$ forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

I.D - Établir la formule

$$\frac{d}{dx}B_n^k(x) = n(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et en déduire la décomposition du polynôme $\int_0^x B_n^i(t)dt$ sur la base formée par les polynômes $B_{n+1}^k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

Partie II -

On rappelle que les paraboles sont les courbes dont une représentation paramétrique est :

$$t \mapsto M(t) = A + t\vec{V} + t^2\vec{W}$$

où $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs indépendants.

L'axe d'une telle parabole P admet $\vec{W}$ comme vecteur directeur et passe par le sommet S de P caractérisé par la propriété suivante : la tangente en S à P est perpendiculaire à $\vec{W}$.

II.A - Soient trois points A_0, A_1, A_2 distincts. On définit B_0 barycentre des points A_0 et A_1 affectés des coefficients $(1-t)$ et t : $B_0 = (1-t)A_0 + tA_1$.

De même on définit :

B_1 barycentre de A_1 et A_2 affectés des coefficients $(1-t)$ et t

C_0 barycentre de B_0 et B_1 affectés des coefficients $(1-t)$ et t.

Exprimer $C_0(t)$ au moyen des polynômes $B_2^k(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ et des points A_0, A_1, A_2 et montrer que la courbe décrite par le point $C_0(t)$ est une parabole P si et seulement si les points A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés. Montrer que toute parabole peut être générée par un tel procédé.

II.B - Montrer que la parabole P passe par les points A_0 et A_2. Quels sont les vecteurs tangents à P en A_0 et A_2 ? Reconnaître la tangente au point $C_0(t)$.

Exemple : L'espace étant muni d'un repère orthonormé, d'origine O, représenter soigneusement sur une même figure les paraboles obtenues dans les trois cas suivants :

$A_0(1, 0, 0)$, $A_1(0, 2, 0)$, $A_2(3, 0, 0)$

$A_0(1, 0, 0)$, $A_1(1, 1, 0)$, $A_2(3, 0, 0)$

$A_0(1, 0, 0)$, $A_1(4, 2, 0)$, $A_2(3, 0, 0)$

On ne tracera que les arcs des paraboles compris entre A_0 et A_2.

Ceci justifie la notion de polygone de contrôle : en modifiant le polygone, l'opérateur contrôle la forme de la courbe tracée par l'ordinateur.

Nous utilisons maintenant cette représentation pour obtenir quelques propriétés des paraboles.

II.C - Que peut-on dire des rapports

$$\frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0A_1}},\ \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}},\ \frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{C_0B_1}}\ ?$$

II.D - On appelle A_1' le milieu de $[A_0A_2]$ et C le point $C_0\left(\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que les points A_1, A_1', C sont alignés.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{C_0(t)C_0(1-t)}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ sont colinéaires et que le milieu de $[C_0(t)C_0(1-t)]$ appartient à la droite (A_1A_1'). Quel est le lieu du milieu des cordes parallèles à (A_0A_2) ?

II.E - Soit B_0' le milieu de $[A_0C_0]$. Montrer que les droites (B_0B_0') et (A_1A_1') sont parallèles.

Application : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, les points A_0, A_1, A_2 ont pour coordonnées : $A_0(1,0,0), A_1(0,1,0), A_2(0,0,2)$. Trouver les coordonnées du sommet de la parabole de polygone de contrôle $[A_0A_1A_2]$.

II.F - Les points A_0, A_1, A_2 étant non alignés, on considère les paraboles P_1, définie par le polygone $[A_0A_1A_2]$, de point courant $M(t)$, et P_2, définie par le polygone $[A_1A_2A_0]$ de point courant $N(u)$, paramétrées par le procédé décrit en II.A. Montrer qu'il existe deux valeurs du couple (t,u) pour lesquelles $M(t) = N(u)$ et que P_1 et P_2 se coupent sur la médiane issue de A_0 dans le triangle $[A_0A_1A_2]$.

Partie III -

III.A - On considère une suite de $(n+1)$ points distincts $A_0, A_1, \dots, A_n$, et on pose $A_i^0 = A_i$ pour $0 \le i \le n$ (les A_i^0 pouvant être considérées comme des fonctions constantes).

Pour $k = 1, 2, \dots, n$, on construit de proche en proche les suites finies de fonctions $(A_i^k)_{0 \le i \le n-k}$ données par :

$$\forall t \in [0,1],\ A_i^k(t) = (1-t)A_i^{k-1}(t) + tA_{i+1}^{k-1}(t) \text{ (algorithme de De Casteljau).}$$

Montrer que

$$A_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} A_jB_n^j(t)$$

et que la courbe C (courbe de Bézier de polygone de contrôle $[A_0A_1\dots A_n]$) définie par $t \mapsto A_0^n(t)$) passe par les points A_0 et A_n.

III.B - Exprimer la dérivée première (respectivement seconde) de $A_0^n(t)$ au moyen des vecteurs $\Delta_i = A_{i+1} - A_i$ (respectivement $\Delta_i^2 = A_{i+2} - 2A_{i+1} + A_i$). Que trouverait-on pour la dérivée troisième ? Que sont les vecteurs tangents en A_0 et A_n ?

III.C - Montrer que si les points $(A_i)_{0 \le i \le n}$ sont alignés, alors C est portée par une droite. Réciproque ? Montrer que si les points A_i sont coplanaires, alors la courbe est plane. Réciproque ?

III.D - Soit A_0, A_1, A_2, A_3 quatre points distincts.

III.D.1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe de Bézier soit une parabole.

III.D.2) On suppose que les quatre points ne sont pas coplanaires. La courbe obtenue peut-elle avoir des points singuliers ?

Partie IV -

Dans cette partie, on appelle courbe de Bézier de polygone de contrôle $[A_0 A_1 A_2 \ldots A_n]$ l'application :

$$t \in [0,1] \mapsto M(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k B_n^k(t) \text{ (on se limite à l'arc d'extrémités } A_0 \text{ et } A_n\text{).}$$

Soit k un entier strictement positif et $kn+1$ points notés $A_0, A_1, \ldots, A_{kn}$.

On considère les courbes de Bézier :

Γ_1 de polygone $[A_0 A_1 \ldots A_n]$ de point courant $M_1(t)$

Γ_2 de polygone $[A_n A_{n+1} \ldots A_{2n}]$ de point courant $M_2(t)$

Γ_k de polygone $[A_{(k-1)n} A_{(k-1)n+1} \ldots A_{kn}]$ de point courant $M_k(t)$.

Soit Γ la courbe, réunion des courbes Γ_i, paramétrée par :

$$u \in [0,1] \mapsto M(u) = M_i(ku - i + 1) \text{ pour } u \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right].$$

IV.A - Montrer que pour que la courbe Γ soit de classe C^1 il faut et il suffit que A_{ni} soit le milieu de $[A_{ni-1} A_{ni+1}]$ $(1 \le i \le k-1)$.

IV.B - Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (portant sur les points A_j) pour que la courbe soit de classe C^2 est :

$$2\overrightarrow{A_{ni-1}A_{ni+1}} = \overrightarrow{A_{ni-2}A_{ni+2}} \ (1 \le i \le k-1) \text{ et } A_{ni} \text{ milieu de } [A_{ni-1}A_{ni+1}].$$

IV.C - Soit $A_0, A_n, A_{2n}, \ldots, A_{kn}$ une suite de points distincts et une suite de courbes de Bézier $\Gamma_i (1 \le i \le k)$ d'origine $A_{n(i-1)}$ d'extrémité A_{ni}. Soit Γ la courbe réunion des Γ_i, paramétrée comme précédemment.

IV.C.1) On suppose ici que $n = 2$ et on donne un vecteur $\overrightarrow{V_1}$. Montrer qu'il existe une et une seule courbe Γ, de degré 2 au plus, qui soit de classe C^1 et dont le vecteur dérivé en A_0 soit $\overrightarrow{V_1}$.

IV.C.2) On suppose ici que $n = 3$ et on donne deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$. Montrer qu'il existe une et une seule courbe Γ, de degré 3 au plus, qui soit de classe C^2 et dont les vecteurs dérivés première et seconde au point A_0 soient respectivement $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

IV.D - On se limite maintenant à trois points distincts A_0, A_3, A_6.

IV.D.1) Soit $\overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs. Montrer qu'il existe une seule courbe Γ de degré 3 au plus qui soit de classe C^2 et qui admette $\overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{V_2}$ comme vecteurs dérivés aux points A_0 et A_6.

IV.D.2) Montrer qu'il existe une seule courbe Γ de degré 3 au plus qui soit de classe C^2 et dont les vecteurs dérivés secondes soient nuls en A_0 et A_6.

IV.E - On donne quatre points distincts A_0, A_3, A_6, A_9.

IV.E.1) Montrer qu'il existe une seule courbe Γ de degré 3 au plus, de classe C^2 et dont les vecteurs dérivés secondes soient nuls en A_0 et A_9. Soit $u \in [0,1] \mapsto M(u)$ sa représentation paramétrique.

IV.E.2) Soit C une courbe quelconque de classe C^2 définie par :

$$u \in [0,1] \mapsto N(u)\text{, vérifiant } N(0) = A_0,\ N\left(\frac{1}{3}\right) = A_3,\ N\left(\frac{2}{3}\right) = A_6,\ N(1) = A_9 .$$

On propose de démontrer que le minimum de l'intégrale $\int_0^1 \|N''(u)\|^2 du$ est atteint par la courbe Γ, définie au IV.E.1. Montrer que :

$$\int_0^1 \|N''\|^2 du = \int_0^1 \|M''\|^2 du + \int_0^1 \|N'' - M''\|^2 du + 2\int_0^1 (M'' | N'' - M'')\ du$$

Conclure en intégrant par parties la dernière de ces intégrales.

Le petit coin de la culture : Au début des années 60, P. Bézier et P. De Casteljau, alors ingénieurs chez Renault et Citroën, développèrent, indépendamment l'un de l'autre, ces procédés de génération de courbes et de surfaces pour obtenir une méthode de numérisation des formes des pièces utilisées dans l'industrie automobile. Depuis, cela n'a cessé de se développer...

••• FIN •••