Partie I - Nombres de Bernoulli

Les polynômes que l'on considère sont à coefficients réels. On identifiera un polynôme et la fonction polynomiale associée.

I.A - Suite des polynômes de Bernoulli

I.A.1) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant $B_0 = 1$ puis pour tout entier $n \geq 1$,

$$B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)dt = 0.$$

I.A.2) Montrer que chaque B_n est un polynôme unitaire de degré n. Déterminer B_1, B_2, B_3.

I.A.3) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = B_n$.

I.B - Nombres de Bernoulli

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.

I.B.1) Montrer que

$$B_0(1) = B_0(0) = 1, \; B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2},$$

et pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.

I.B.2) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

Partie II - Fonction génératrice des polynômes de Bernoulli

II.A - Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x \mapsto u(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (On pourra considérer la fonction $1/u$). En déduire que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\phi(x, t) = \frac{xe^{tx}}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0$$

et

$$\phi(0, t) = 1$$

est de classe C^k sur $\mathbb{R}^2$ pour tout entier $k \geq 0$.

II.B -

II.B.1) Déterminer, pour t réel fixé, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $x \mapsto \phi(x, t)$.

II.B.2) Expliciter

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x, t)$$

en fonction de $\phi(x, t)$, puis montrer pour $n \geq 1$ que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x, t) = x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x, t) + n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\phi(x, t).$$

II.B.3) La fonction a_n est définie pour tout réel t par :

$$a_n(t) = \frac{\partial^n\phi}{\partial x^n}(0, t) \text{ c'est-à-dire } a_n(t) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x, t)\right]_{x=0}.$$

Vérifier que $a_0 = 1$, puis pour tout entier $n \geq 1$, que $a_n' = na_{n-1}$ et

$$\int_0^1 a_n(t)dt = 0.$$

(Pour le calcul de $\int_0^1 a_n(t)dt$ on pourra déterminer $\int_0^1 \phi(x, t)dt$).
En déduire que la fonction a_n est polynomiale et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = B_n$.

II.B.4) Déterminer de deux manières, pour n entier supérieur à 1 et t réel fixé, le développement limité à l'ordre n en 0 de :

$$x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\phi(x, t).$$

En déduire :

$$B_n(t) = t^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k(t).$$

II.C - Donner une relation permettant de calculer les nombres de Bernoulli b_n. Écrire un algorithme permettant d'obtenir la valeur de $b_{2n} (n \geq 1)$, puis donner la valeur (exacte ou approchée) de b_{10}.

Partie III - Formule d'Euler Mac-Laurin

III.A - Dans cette question, f est une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^{2p} où p est un entier supérieur à 1. On pose pour tout k entier compris entre 0 et p :

$$R_k = \int_0^1 \frac{f^{(2k)}(t)B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

où $f^{(2k)}$ désigne la dérivée $2k$-ième de f.

III.A.1) Exprimer R_0 en fonction de R_1, puis pour tout entier $k \geq 1$, R_k en fonction de R_{k+1}.

III.A.2) En déduire :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)] + R_p .$$

III.B - Dans cette question, a et b sont deux réels tels que $a < b$, g est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^{2p} où p est un entier supérieur à 1, n est un entier naturel supérieur où égal à 1. On pose

$$h = \frac{b-a}{n}$$

et l'on considère la subdivision $(a_k)_{0 \le k \le n}$ de l'intervalle $[a, b]$ définie par : $a_k = a + kh$, $0 \le k \le n$. Pour tout réel x on considère $\langle x \rangle = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

III.B.1) Montrer que

$$\int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}\left(\langle \frac{u-a}{h} \rangle\right) du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g^{(2p)}(u) B_{2p}\left(\frac{u-a_k}{h}\right) du .$$

III.B.2) Montrer que

$$\int_a^b g(t)dt$$

est égale à l'expression suivante :

$$h\left[\frac{g(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(a+kh) + \frac{g(b)}{2}\right] - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!} h^{2j}[g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] + r_{p,n} ,$$

où $r_{p,n}$ est défini par :

$$r_{p,n} = \frac{h^{2p}}{(2p)!} \int_a^b g^{(2p)}(u) B_{2p}\left(\langle \frac{u-a}{h} \rangle\right) du .$$

C'est la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin.

Partie IV - Application

α est un réel donné, $\alpha \in]0,1[$. On se propose dans cette partie de déterminer un équivalent de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik^\alpha} .$$

(i nombre complexe de carré -1).

IV.A - À l'aide de la fonction $g : t \mapsto e^{it^\alpha}$, exprimer S_n en fonction de

$$\int_1^{n+1} g(t)dt$$

et de dérivées successives de la fonction g.

IV.B -

IV.B.1) Montrer que, lorsque $n \to \infty$, l'intégrale

$$I_n = \int_1^{n^\alpha} e^{ix} x^{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} dx$$

est équivalente à $-ie^{in^\alpha} n^{(1-\alpha)}$. On pourra utiliser la technique d'intégration par parties.

IV.B.2) En déduire un équivalent de

$$\int_1^n e^{it^\alpha} dt .$$

IV.C - Montrer que, pour tout entier naturel $j \geq 1$,

$$g^{(j)}(n) = O(n^{j(\alpha - 1)})$$

(O désigne la relation de domination lorsque $n \to \infty$).

IV.D -

IV.D.1) Déterminer un entier naturel p tel que la suite

$$\left(\int_1^{n+1} g^{(2p)}(t) B_{2p}(\langle t - 1 \rangle) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

soit bornée ; on pourra poser $M_{2p} = \sup(|B_{2p}(t)|, 0 \leq t \leq 1)$.

IV.D.2) En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini.

• • • FIN • • •
